Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben Logarithmusgleichungen

Inhaltsverzeichnis

A) Vorbemerkungen

Um Logarithmusgleichungen lösen zu können, ist es sehr wichtig, dass man mit den Potenz-und Logarithmengesetzen vertraut ist. Auch die Definition des Logarithmus ist wichtig. Wichtig ist zudem, dass Sie die Lösungen immer überprüfen, da Logarithmen nur für positive Zahlen definiert sind.

B) Lernziele

- Wissen, dass Logarithmen Exponenten sind
- Die Definition des Logarithmus kennen und anwenden können
- Wissen, dass Logarithmen nur für positive Zahlen definiert sind
- Wissen was eine Exponentialgleichung ist
- Logarithmen mit dem Taschenrechner berechnen können
- Logarithmengesetze kennen und anwenden können
- Logarithmische Ausdrücke vergleichen mit Hilfe der Basis und des Exponenten
- Gleichungen lösen können in denen Logarithmen auftreten

C) Repetition Logarithmen

1. Der Begriff des Logarithmus

a) Einführendes Beispiel
Geg.: Bakterienkultur bedeckt zur Zeit $t = 0$ 1 cm^2. Die Bakterienkultur verdoppelt sich jede Stunde.
Ges.: Nach wie vielen Stunden sind 16 cm^2 (32768 cm^2 usw....) bedeckt?
Überlegung:

Zeit t	0	1	2	3	4	....	x	$Std.$
Fläche	1	2	4	8	16	....	32768	cm^2
	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	....	2^x	

Lösung: Nach vier Stunden sind also 16 cm^2 bedeckt.
Um x zu erhalten muss also noch die Gleichung $2^x = 32768$ gelöst werden.
Eine solche Gleichung nennt man ***Exponentialgleichung***.
Bei Exponentialgleichungen ist stets der Exponent die gesuchte Grösse.

b) Die Definitionen

Definition 1:
Eine Gleichung der Form $a^x = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$ heisst Exponentialgleichung.

Definition 2:
Der Logarithmus von b zur Basis a (geschrieben: $\log_a b$) ist die Lösung der Gleichung $a^x = b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$.
D.h. $\boldsymbol{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$
a heisst Basis und b heisst Numerus.

c) Einige Bemerkungen/Beispiele

(1) Wie findet man also den Logarithmus von 100 zur Basis10?
$\log_{10}100 = 2$, da $10^2 = 100$
Weitere Beispiele:
$\log_2 64 = 6$, da $2^6 = 64$
$\log_{10}\frac{1}{10} = -1$, da $10^{-1} = \frac{1}{10}$
$\log_{25}5 = \frac{1}{2}$, da $25^{\frac{1}{2}} = 5$

(2) ***Logarithmen*** sind also ***Exponenten***!
(3) Die Definitionen setzen voraus, dass $a, b > 0$ sind, weil:
$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ und die Wurzel einer negativen Zahl ist nicht definiert in $\mathbb{R}$!
Wenn a also grösser Null sein muss, gilt nachher automatisch, dass $b > 0$, da $b = a^x$.
D.h. die Einschränkung $a, b \in \mathbb{R}^+$ ist also notwendig!
Logarithmen können also in $\mathbb{R}$ nur aus positiven Zahlen gezogen werden!

(4) Es gilt $a^{\log_a b} = b$, da aus $a^x = b$ und $x = \log_a b$ (setze x in $a^x = b$ ein) folgt $a^{\log_a b} = b$.
Beispiel: Wenn also $3^{\log_3 9}$ dasteht, kann ich 9 schreiben (bedeutet das Gleiche!).

(5) Man schreibt für gewisse Basen Abkürzungen:
Für Basis 10 schreibt man statt $\log_{10} b$ einfach lg$b$.
Für Basis 2 schreibt man statt $\log_2 b$ einfach lb$b$.
Für Basis e schreibt man statt $\log_e b$ einfach ln$b$, wobei e = 2,71828...(siehe auch TR)

2. Rechnen mit Logarithmen

a) Gebrauch des Taschenrechners

Die Logarithmen zur Basis 10 sind im Taschenrechner gespeichert.
Ges.: $\log_{10} 20$
Lös.: Taste LOG tippen.
Zahl 20 eingeben. (Evtl. Klammer schliessen)
ENTER. Das Resultat: $\log_{10} 20 \approx 1{,}3$.

b) Umrechnungsformel (Basiswechselsatz) für Logarithmen mit beliebigen Basen

Wie oben erwähnt sind im Taschenrechner die Logarithmen zur Basis 10 gespeichert, d.h. $\log_{10} u$ ist bekannt für alle $u \in \mathbb{R}^+$.
Um aber das einleitende Beispiel zu lösen muss $\log_2 32768$ bekannt sein.
Dieses Problem kann mit der Umrechnungsformel, häufig auch Basiswechselsatz genannt, gelöst werden:

$$\boxed{\log_b z = \frac{\log_a z}{\log_a b}}$$

Lösung des Einführungsbeispiels:
$\log_2 32768 = \dfrac{\log_{10} 32768}{\log_{10} 2} = 15$. Oder auch $\log_2 32768 = \dfrac{\ln 32768}{\ln 2}$ (beliebige Basis kann gewählt werden).
Die Lösung unseres Einführungsbeispiels lautet also: Nach 15 Std. bedecken die Bakterien eine Fläche von 32768 cm^2.

3. Logarithmengesetze

(1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ "*Zweibaumgesetz*"

(2) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ $\quad a, x, y \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$

(3) $\log_a (x^r) = r \cdot \log_a x$ "*Apfelbaumgesetz*"

Beispiele/Anwendung der Gesetze:

(1) $\log_{10}(2x) = \log_{10} 2 + \log_{10} x$

(2) $\log_{10}(\frac{2}{3}) = \log_{10} 2 - \log_{10} 3$

(3) $\log_{10}(2^{10}) = 10 \cdot \log_{10} 2$

(4) $\log_{10}\left(\dfrac{3a^2}{5b^3}\right) = \log_{10}\left(3a^2\right) - \log_{10}\left(5b^3\right) = \log_{10} 3 + \log_{10} a^2 - \log_{10} 5 - \log_{10} b^3 =$

$\log_{10} 3 + 2 \cdot \log_{10} a - \log_{10} 5 - 3 \cdot \log_{10} b$

Was sollte man nicht tun?
$\log_a (x+y) \neq \log_a x + \log_a y$. Es gibt kein solches Distributivgesetz für die Logarithmen.

D) Logarithmusgleichungen

(a) Der Numerus ist die gesuchte Grösse: Man verwendet die Definition des Logarithmus $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Bsp: (1) $\log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(2) $\log_5 (x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = 5^2 \Leftrightarrow x = 5^2 - 1 = 24$

(3) $3 \cdot \log_5 (5x) = 9$ Zuerst geteilt durch 3 rechnen erst dann die Definition verwenden.

$3 \cdot \log_5 (5x) = 9 \Leftrightarrow \log_5 5x = \frac{9}{3} = 3 \Leftrightarrow 5x = 5^3 \Leftrightarrow x = 5^2 = 25$

(b) Die Basis ist die gesuchte Grösse: Auch hier Definition verwenden.

Bsp.: (1) $\log_x 64 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$

(2) $2 \cdot \log_3 (2x+1) = 7$ geteilt durch 2

$\Leftrightarrow \log_3 (2x+1) = \frac{7}{2}$ Def.Log.

$\Leftrightarrow 3^{\frac{7}{2}} = 2x+1$ nach x auflösen

$\Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{3^{\frac{7}{2}} - 1}{2} = \frac{\sqrt[2]{3^7} - 1}{2} \approx 22.88$

$\text{Probe : Wahre Aussage} \Rightarrow IL = \left\{ \frac{\sqrt[2]{3^7} - 1}{2} \right\}$

(c) Logartihmengesetze sind notwendig.

Bsp.: $\lg x^3 + 2 \lg x^2 = 6.426$ "Apfelbaumgesetz"

$\Leftrightarrow \lg x^3 + \lg x^4 = 6.426$ "Zweibaumgesetz"

$\Leftrightarrow \lg(\mathrm{x}^3 \cdot x^4) = 6.426$ Potenzgesetz

$\Leftrightarrow \lg\left(x^7\right) = 6.426$ Def.Log

$\Leftrightarrow 10^{6.426} = x^7$ 7.Wurzel ziehen

$\Rightarrow x = \sqrt[7]{10^{6.426}} \approx 8.28$

$\text{Probe : Wahre Aussage} \Rightarrow IL \approx \{8.28\}$

(d) Wir benutzen Logarithmengesetze und den Satz: Zwei Logarithmen mit gleicher Basis sind gleich, wenn ihre Numeri gleich sind.

Bsp.: (1) $\log_4 (3x+4) = \log_4 (2x+2)$

$\Rightarrow 3x+4 = 2x+2$

$\Leftrightarrow x = -2$

$\text{Probe : Negativer Logarithmus entsteht} \Rightarrow IL = \emptyset$

(2)

$\log_2(10x+24)-\log_2(x-84)=\log_2(x-36)$ Log.gesetz

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{(10x+24)}{(x-84)}\right)=\log_2(x-36)$ Log. gleich, wenn Numeri gleich

$\Rightarrow \left(\frac{(10x+24)}{(x-84)}\right)=(x-36)$ mal $(x-84)$

$\Rightarrow 10x+24=(x-36)(x-84)$ ausmultiplizieren

$\Leftrightarrow 10x+24=x^2-120x+3024$ alles auf eine Seite

$\Leftrightarrow x^2-130x+3000=0$ Faktorisieren oder Auflösungsformel verwenden

$\Leftrightarrow (x-30)(x-100)=0$ Ein Produkt = 0, wenn ein Faktor = 0

$\Rightarrow x_1=30$ und $x_2=100$

Probe machen: Für $x_1=30$ erhält man in der Ursprungsgleichung einen negativen Logarithmus. Also keine Lösung.

Für $x_2=100$ erhält man eine wahre Aussage.

$IL=\{100\}$

E) Aufgaben mit Musterlösungen

Aufgaben

1. a) $\log_7(7x)=2$ b) $2\log_7 x=\frac{2}{3}$
2. a) $\log_3(5x+2)=\log_3(3x+12)$ b) $2\cdot\log_2(x-1)=\log_2(3x+1)$
3. a) $\log_x 8=-3$ b) $\log_x\frac{1}{27}=9$
4. a) $\log_4 2+\log_4 x=15$ b) $\log_2(3x-1)+\log_2(x+5)=6$
5. $2\cdot\lg(x^2-14)=\lg 5+\lg(6x^2-49)$

Lösungen

1.a) $\log_7(7x)=2$ Def.Log.

$\Leftrightarrow 7^2=7x$:7

$\Leftrightarrow x=7$

Probe: $\log_7(7\cdot 7)=\log_7 7^2=2$ Wahre Aussage

$\Rightarrow$ IL=$\{7\}$

1.b) $2\log_7 x=\frac{2}{3}$: 2

$\Leftrightarrow \log_7 x=\frac{1}{3}$ Def.Log.

$\Leftrightarrow x=7^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{7}$

Probe: $2\cdot\log_7 7^{\frac{1}{3}}=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ Wahre Aussage

$\Rightarrow IL=\left\{\sqrt[3]{7}\right\}$

2.a) $\log_3(5x+2)=\log_3(3x+12)$ Satz Numeri

$\Leftrightarrow 5x+2=3x+12$ Zusammenfassen

$\Leftrightarrow 2x=10$ $:2$

$\Leftrightarrow x=5$

Probe: $\log_3(5\cdot 5+2)=\log_3(3\cdot 5+12)\Leftrightarrow \log_3 27=\log_3 27$ wahre Aussage $\Rightarrow$ IL=$\{5\}$

2.b)

$2\cdot\log_2(x-1)=\log_2(3x+1)$ "Apfelbaumgesetz"

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2=\log_2(3x+1)$ Satz Numeri

$\Rightarrow (x-1)^2=(3x+1)$ Binom berechnen

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=3x+1$ zusammenfassen

$\Leftrightarrow x^2-5x=0$ Faktorisieren

$\Leftrightarrow x(x-5)=0$ Ein Produkt = 0, wenn ein Faktor = 0

$\Rightarrow x_1=0, x_2=5$

Probe: $x_1=0$: Es entsteht negativer Log. Also keine Lösung.

$x_2=5$: Wahre Aussage $\Rightarrow$ IL=$\{5\}$

3.a)

$\log_x 8=-3$ Def.Log.

$\Leftrightarrow x^{-3}=8$ Potenzgesetz

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^3}=8$ $\cdot x^3$ und $:8$

$\Rightarrow x^3=\frac{1}{8}$ 3. Wurzel

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Probe: $\log_{\frac{1}{2}} 8=\log_{2^{-1}} 2^3=-3$ Wahre Aussage $\Rightarrow IL=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3.b) $\log_x \frac{1}{27}=9$ Def.Log.

$\Leftrightarrow x^9=\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}$ 9. Wurzel und kürzen (Potenzgesetz)

$\Leftrightarrow x=\sqrt[9]{\frac{1}{3^3}}=\left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{1}{9}}=\frac{1}{(3^3)^{\frac{1}{9}}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}=3^{-\frac{1}{3}}$

Probe: Wahre Aussage $\Rightarrow$ IL=$\left\{3^{-\frac{1}{3}}\right\}$

4.a) $\log_4 2+\log_4 x=15$ "Zweibaumgesetz"

$\Leftrightarrow \log_4(2x)=15$ Def.Log

$\Leftrightarrow 2x=4^{15}$ $:2$ und Potenzgesetz

$\Leftrightarrow x=\frac{4^{15}}{2}=\frac{(2^2)^{15}}{2}=\frac{2^{30}}{2}=2^{29}$

Probe: $\log_4 2+\log_4 2^{29}=\frac{1}{2}+\log_{2^2} 2^{29}=0.5+14.5=15$ Wahre Aussage

$\Rightarrow IL=\{2^{29}\}$

4.b)

$\log_2(3x-1)+\log_2(x+5)=6$ "Zweibaumgesetz"

$\Leftrightarrow \log_2[(3x-1)(x+5)]=6$ Klammern ausmultiplizieren

$\Leftrightarrow \log_2(3x^2+14x-5)=6$ Def.Log.

$\Leftrightarrow 3x^2+14x-5=2^6$ -2^6

$\Leftrightarrow 3x^2+14x-69=0$ Quadratische Gleichung mit Auflösungsformel lösen

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot 3\cdot(-69)}}{2\cdot 3}=\frac{-14\pm\sqrt{1024}}{6}=\frac{-14\pm 32}{6}$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-14+32}{6}=3 \text{ und } x_2=\frac{-14-32}{6}=\frac{-46}{6}=-\frac{23}{3}$$

Probe:

$x_1=3:\log_2(3\cdot 3-1)+\log_2(3+5)=\log_2 8+\log_2 8=3+3=6$ Wahre Aussage

$$x_2=-\frac{23}{3}:\log_2\left(3\cdot\left(-\frac{23}{3}\right)-1\right)+\log_2\left(\left(-\frac{23}{3}\right)+5\right)=\log_2(-24)+\log_2\left(-\frac{8}{3}\right)$$

negativer Log. nicht definiert, also keine Lösung.

$\Rightarrow IL=\{3\}$

5.

$2\cdot\lg(x^2-14)=\lg 5+\lg(6x^2-49)$ "Apfelbaumgesetz" und "Zweibaumgesetz"

$\Leftrightarrow \lg(x^2-14)^2=\lg(5(6x^2-49))$ Binom berechnen und Multiplikation

$\Leftrightarrow \lg(x^4-28x^2+196)=\lg(30x^2-245)$ Satz Numeri

$\Rightarrow x^4-28x^2+196=30x^2-245$ Alles auf eine Seite

$\Leftrightarrow x^4-58x^2+441=0$ Substitution $x^2=z$

$\Rightarrow z^2-58z+441=0$ Quadratische Gleichung lösen.

$\Leftrightarrow (z-49)(z-9)=0$ oder auch mit Auflösungsformel

$\Rightarrow z_1=49, z_2=9$ Substitution rückgängig machen $x=\pm\sqrt{z}$

$\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{49}=\pm 7, x_{3,4}=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

Probe:

Für $x_{2,3}$ entsteht neg. Log. Also keine Lösungen.

Für $x_{1,2}$ erhält man wahre Aussagen $\Rightarrow$ IL$=\{-7,7\}$