Kantonsschule Beromünster – Langzeitgymnasium

Maturitätsprüfung 2014

Name, Vorname: ....

Klasse: ....

Grundlagenfach Mathematik

Prüfungsdatum: 26. Mai 2014
Prüfungsdauer in Minuten: 180 Minuten

Aufgaben-Übersicht

Themen		max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	Gebrochen rationale Funktionen	20P	
2	Ganz rationale Funktionen	6P	
3	Integralrechnung	17P	
4	Vektorgeometrie	12P	
5	Folgen und Reihen	19P	
6	Wahrscheinlichkeit	18P	
	Total	92P	
		Note	

Hinweise

- Lösungswege müssen ersichtlich sein.
- Jede Aufgabe ist auf einem separaten Bogen zu lösen.

Erlaubte Hilfsmittel

- Nicht grafik-fähiger Taschenrechner
- Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe“ oder „Formeln und Tafeln“ von Orell Füssli-Verlag

Anzahl Seiten

- Titelblatt 1 Seite
- Aufgaben 4 Seiten, nummeriert von 2 bis 5

Bewertungs-Massstab

80 Punkte geben die Note 6.0
48 Punkte geben die Note 4.0

Examinatorin Kathrin Bolliger

1. Aufgabe: Gebrochen rationale Funktionen (20P)

Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf die Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{2x^3+3x^2+x}{2x^2+x-1}.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich. (2P)

b) Bestimmen Sie die Nullstellen. (1.5P)

c) Bestimmen Sie lokale Extrema. (6.5P)

d) Bestimmen Sie Wendepunkte. (1P)

e) Bestimmen Sie allfällige Lücken, Pole und Asymptoten. (5P)

f) Zeichnen Sie den Graphen mit den berechneten Angaben. Wählen Sie dazu **4 Häuschen für eine Einheit** sowohl auf der x-Achse als auch auf der y-Achse. Verwenden Sie für den Graphen eine ganze A4-Seite. (4P)

2. Aufgabe: Ganz rationale Funktionen (6P)

Sei p(x) eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:

- Zeichnet man ausser dem Graphen von p(x) die Gerade mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = 8x - 2,$$

  so ist g(x) parallel zur Tangente an den Graphen von p(x) im Punkt P(-2|-2).

- Der Graph der Funktion p(x) hat ein lokales Minimum bei x = -1.

- Der Graph der Funktion p(x) geht durch den Ursprung.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion p(x). Sie müssen nicht überprüfen, ob es sich bei x = -1 tatsächlich um ein lokales Minimum handelt.

3. Aufgabe: Integralrechnung (17P)

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \sin(x)$. (2P)

b) Wie gross ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \sin(x)$ und der x-Achse im Intervall $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$? (3P)

c) Bestimmen Sie a so, dass im Intervall [a; a+3] der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ und der x-Achse 2 beträgt. (4P)

d) Man rotiert den Graphen der Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt{x^5}$ um die x-Achse. Welches Volumen entsteht im Intervall [0;3]? (2P)

e) Aus dem Rotationskörper von Teilaufgabe d) wird ein Zylinder geschnitten.

Skizzieren Sie die Situation. (1P)

Wie gross ist das Volumen des maximal möglichen Zylinders? (5P)

4. Vektorgeometrie (12P)

a) Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden g durch die Punkte A(2|-1|4) und B(3|1|-1). (1P)

b) Geben Sie die Koordinatengleichung der Ebene E, die normal auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ steht und durch den Punkt P(2|0|0) geht. (2P)

c) Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene F, die durch A(2|-1|4) und B(3|1|-1) geht und parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft. (2P)

d) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden h und i. (3P)

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

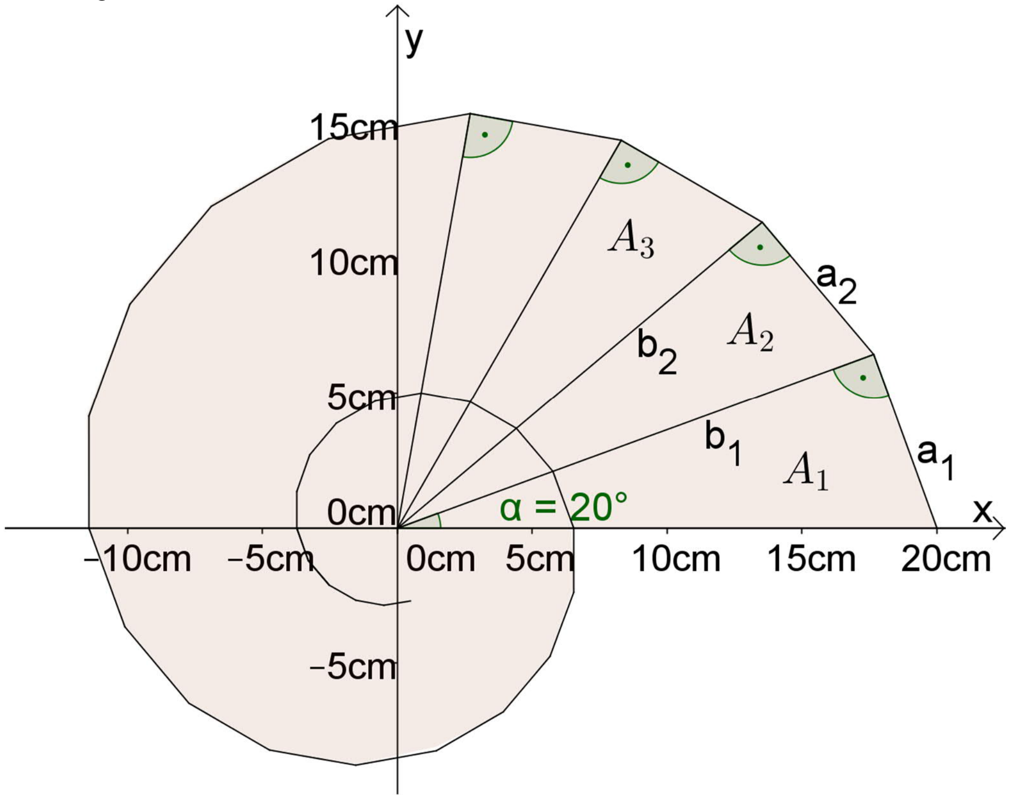
e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel **auf eine Stelle nach dem Komma** zwischen den beiden Ebenen G und H.

$$G: 2x + y - 2z = 4$$

$$H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ (4P)

5. **Folgen und Reihen: (19P)**

Die folgende Schnecke hat einen konstanten Zentriwinkel von $\alpha = 20°$ und eine Anfangslänge von 20cm. Die Seiten a_1, a_2, … sowie b_1, b_2, … sowie die Dreiecksflächen A_1, A_2, … bilden geometrische Folgen.



a) In dieser Graphik sind etwas mehr als 1.75 Umdrehungen der Schneckenform gezeichnet. Wie viele Strecken a_i sind in 3 Umdrehungen enthalten? (2P)

b) Berechnen Sie die Längen der Strecken a_1, a_2, b_1 und b_2. Runden Sie die Resultate auf zwei Stellen nach dem Komma. **Rechnen Sie nicht mit gerundeten Resultaten weiter.**(5P)

c) Welche Fläche überdeckt die grau markierte Schnecke? Dabei zählen mehrfach überdeckte Teilflächen nur einfach. (4P)

d) Wie lang ist die Länge aller Strecken a_i zusammen? Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma. (3P)

Die folgende Teilaufgabe bezieht sich nicht mehr auf den Graphen.

e) Wie viele Folgenglieder a_n sind weiter als 0.01 vom Grenzwert der Folge $a_n = \frac{n+1}{n}$ entfernt? (5P)

6. Wahrscheinlichkeit (18P)

Ausser dem wohlbekannten Würfel mit 6 Flächen gibt es auch solche mit 20, 12, 10, 8 oder 4 gleichen Flächen. Wir sprechen von nun an

- von einem 10er Würfel, wenn er 10 gleiche Flächen hat und die Seitenflächen die Einträge 1, 2, 3, … 10 aufweisen,
- von einem 8er Würfel, wenn er 8 gleiche Flächen hat und die Seitenflächen die Einträge 1, 2, …, 8 aufweisen, usw.

a) Man werfe gleichzeitig einen 6er und einen 10er Würfel. Auf wie viele Arten kann man die Augensumme 12 erhalten? (1P)

b) Von sechs Würfeln sind drei blau, zwei sind rot und einer ist schwarz. Auf wie viele Arten kann man die 6 Würfel hintereinander anordnen, wenn man nur die Farbe der Würfel berücksichtigt? (3P)

c) Man hat einen 6er und einen 12er Würfel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Wurf der beiden Würfel beide die Augenzahl 4 zeigen? (1P)

d) Georg verwendet einen 20er Würfel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nach 9 Würfen jedes Mal weniger als 6 Augen geworfen hat? (3P)

e) Zwei Spieler müssen mit einem 4er Würfel gegeneinander antreten. Wer die höhere Augenzahl hat, gewinnt. Da Louis keinen passenden Würfel hat, schlägt er folgendes vor: Er würfelt mit dem 8er Würfel und dividiert die geworfenen Augenzahl durch 2. Hermann überschlägt kurz die erwartete Augenzahl beider Würfel. Auf welche Werte kommt er? (3P)

f) In einem anderen Spiel verliert Anna mit 90%iger Wahrscheinlichkeit. Wie oft muss Anna das Spiel spielen, damit sie mit mehr als 95%iger Wahrscheinlichkeit in mindestens einem der Spiele siegt? (4P)

g) Kurt würfelt mit einem 10er Würfel 12 Mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 4 Mal eine 9 wirft? (3P)