Jahresprüfung 4. Klasse 2021

Fehlende Lösungswege sowie eine unsaubere oder nicht korrekte Darstellung geben Punkteabzug.

1. Faktorisieren Sie folgende Terme [Total 8p]
   - (a) $x^2 + 10x + 25 =$ [2p]
   - (b) $2x^2 + 8x + 8 =$ [2p]
   - (c) $x^4 - 81 =$ [2p]
   - (d) $x^2 + 2xy - 2x - 4y =$ [2p]

2. Vereinfachen Sie folgende Bruchterme [Total 11p]
   - (a) $\dfrac{4x+12}{x^2+5x+6} - \dfrac{x^2+4x}{x^2-16} + 1 =$ [4p]
   - (b) $\dfrac{\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}}{\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}} =$ [2.5p]
   - (c) $\left(\dfrac{-a}{a^3-3a^2-10a} - \dfrac{a-3}{a+2}\right) : \dfrac{4-a}{a-5} =$ [4.5p]

3. Berechnen Sie in den folgenden Bruchtermgleichungen x. Geben Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge an [Total 9p]
   - (a) $\dfrac{4}{x-1} = \dfrac{-4x}{1-x}$ [2.5p]
   - (b) $\dfrac{x+5}{x+3} = \dfrac{x+2}{x+1}$ [2.5p]
   - (c) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6} - \dfrac{x+3}{x} = -\dfrac{x+8}{x-3}$ [4p]

Bitte wenden !

4. Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme und geben Sie die Lösungsmenge an [Total 7p]

   (a) $\left|\begin{array}{rrcr} -3x & +6y & = & 12 \\ 2x & -4y & = & -9 \end{array}\right|$ [2p]

   (b) $\left|\begin{array}{rrcr} a & -3b & = & -13 \\ 3a & +2b & = & 16 \end{array}\right|$ [2p]

   (c) $\left|\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +3z & = & -2 \\ -2x & +3y & +2z & = & -2 \\ 2x & -2y & -2z & = & 0 \end{array}\right|$ [3p]

5. Führen Sie folgende Polynomdivisionen aus [Total 6p]

   (a) $(x^4 - 9x^2 + 4x + 12) : (x^2 - x - 2) =$ [3p]

   (b) $(x^3 - 4x^2 + 2x + 1) : (x - 1) =$ [3p]

Lösungen Jahresprüfung 4. Klasse 2021

1. Faktorisieren Sie folgende Terme.

   (a) $x^2 + 10x + 25 = \underline{\underline{(x+5)^2}}$

   (b) $2x^2 + 8x + 8 = 2(x^2 + 4x + 4) = \underline{\underline{2(x+2)^2}}$

   (c) $x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = \underline{\underline{(x-3)(x+3)(x^2+9)}}$

   (d) $x^2 + 2xy - 2x - 4y = x(x+2y) - 2(x+2y) = \underline{\underline{(x+2y)(x-2)}}$

2. Vereinfachen Sie folgende Bruchterme

   (a) $\dfrac{4x+12}{x^2+5x+6} - \dfrac{x^2+4x}{x^2-16} + 1 = \dfrac{4\cancel{(x+3)}}{(x+2)\cancel{(x+3)}} - \dfrac{x\cancel{(x+4)}}{(x-4)\cancel{(x+4)}} + 1$

   $$= \frac{4\cdot(x-4)}{(x+2)\cdot(x-4)} - \frac{x\cdot(x+2)}{(x-4)\cdot(x+2)} + \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-4)}$$

   $$= \frac{4x-16-x^2-2x+x^2-2x-8}{(x+2)(x-4)} = \underline{\underline{\frac{-24}{(x+2)(x-4)}}}$$

   (b) $\dfrac{\frac{x^2-2x+1}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}} = \dfrac{\frac{(x-1)^2}{x+1}}{\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}} = \dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(x+1)^2}}{\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}} = \underline{\underline{x-1}}$

   (c) $\left(\dfrac{-a}{a^3-3a^2-10a} - \dfrac{a-3}{a+2}\right) : \dfrac{4-a}{a-5}$

   $$= \left(\frac{-a}{a(a^2-3a-10)} - \frac{a-3}{a+2}\right) : \frac{4-a}{a-5}$$

   $$= \left(\frac{-\cancel{a}}{\cancel{a}(a-5)(a+2)} - \frac{(a-3)\cdot(a-5)}{(a+2)\cdot(a-5)}\right)\cdot\frac{a-5}{4-a}$$

   $$= \frac{-1-(a-3)(a-5)}{\cancel{(a-5)}(a+2)}\cdot\frac{\cancel{a-5}}{4-a} = \frac{-1-a^2+8a-15}{(a+2)(4-a)}$$

   Hinweis: $4-a = -(a-4)$

   $$= \frac{-(a^2-8a+16)}{-(a+2)(a-4)} = \frac{-(a-4)^{\cancel{2}}}{-(a+2)\cancel{(a-4)}} = \underline{\underline{\frac{a-4}{a+2}}}$$

3. Berechnen Sie in den folgenden Bruchtermgleichungen x. Geben Sie bei den Aufgaben (a) und (c) den Definitionsbereich und die Lösungsmenge an.

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x-1} &= \frac{-4x}{1-x} && \text{| TU} && \mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\} \\
\frac{4}{x-1} &= \frac{-4x}{-1(x-1)} && | \cdot(x-1) \\
4 &= 4x && | : 4 \\
x &= 1 && && \underline{\underline{\mathbb{L}=\{\}}}
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x-1} &= \frac{-4x}{1-x} && | \cdot(x-1)(1-x) && \mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\} \\
4-4x &= -4x^2+4x && |-4+4x \\
0 &= -4x^2+8x-4 = -4(x^2-2x+1) \\
0 &= -4(x-1)^2 \\
x &= 1 && && \underline{\underline{\mathbb{L}=\{\}}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{x+5}{x+3} &= \frac{x+2}{x+1} && |\cdot(x+3)(x+1) && \mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1;-3\} \\
x^2+6x+5 &= x^2+5x+6 && | -x^2-5x-5 \\
x &= 1 && && \underline{\underline{\mathbb{L}=\{1\}}}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-4}{x^2-x-6} - \frac{x+3}{x} &= -\frac{x+8}{x-3} && \text{| TU} \\
\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}\cdot x}{(x-3)\cancel{(x+2)}\cdot x} - \frac{(x+3)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)} &= -\frac{(x+8)\cdot x}{(x-3)\cdot x} && | \cdot x(x-3) && \mathbb{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2,0,3\} \\
x^2-2x-(x^2-9) &= -(x^2+8x) && \text{| TU} \\
x^2-2x-x^2+9 &= -x^2-8x && | +x^2+8x \\
x^2+6x+9 &= 0 && \text{|TU} \\
(x+3)^2 &= 0 \\
x &= -3 && && \underline{\underline{\mathbb{L}=\{-3\}}}
\end{aligned}$$

4. Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme und geben Sie die Lösungsmenge an.

   (a) $\left| \begin{array}{rrcr} -3x & +6y & = & 12 \\ 2x & -4y & = & -9 \end{array} \right|$

   $2 \cdot I + 3 \cdot II \qquad 0 = -3$

   $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}}}$

   (b) $\left| \begin{array}{rrcr} a & -3b & = & -13 \\ 3a & +2b & = & 16 \end{array} \right| -3 \cdot I + II \qquad 11b = 55 \Rightarrow b = 5$

   Einsetzen in I liefert $a - 15 = -13$, d.h. $a = 2$.

   $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2|5)\}}}$

   (c) $\left| \begin{array}{rrrcr} x & -2y & +3z & = & -2 \\ -2x & +3y & +2z & = & -2 \\ 2x & -2y & -2z & = & 0 \end{array} \right|$

   Mit $2I + II$ und $II + III$ folgt

   $\left| \begin{array}{rrcr} -y & +8z & = & -6 \\ y & & = & -2 \end{array} \right|$

   $y = -2$, $z = -1$, $x = -3$

   $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-3|-2|-1)\}}}$

5. Führen Sie folgende Polynomdivisionen aus:

   (a)
$$\begin{array}{l} \left(x^4 - 9x^2 + 4x + 12 \right) : \left(x^2 - x - 2 \right) = x^2 + x - 6 \\ \underline{-x^4 + x^3 + 2x^2} \\ \qquad x^3 - 7x^2 + 4x \\ \qquad \underline{-x^3 + x^2 + 2x} \\ \qquad\qquad -6x^2 + 6x + 12 \\ \qquad\qquad \underline{6x^2 - 6x - 12} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{l} \left(x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \right) : \left(x - 1 \right) = x^2 - 3x - 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ \qquad -3x^2 + 2x \\ \qquad \underline{3x^2 - 3x} \\ \qquad\qquad -x + 1 \\ \qquad\qquad \underline{x - 1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$